standarización de Fórmulas Proposicionales

Curso 2014-2015

Mari Carmen Suárez de Figueroa Baonza
mcsuarez@fi.upm.es

POLITÉCNICA

enidos

- oducción a la demostración automática
- ndarización de fórmulas
- mas normales
  - rma normal conjuntiva
- ma clausular
- ma clausular de una deducción

ucción a la Demostración Automática (I)

lculo de deducción natural es intuitivo, pero no es no para la automatización de demostraciones as

zonamiento automático se dedica a estudiar cómo un ordenador para ayudar en la parte de resolución oblemas que requiere razonamiento

trata de implementar programas que verifiquen un onamiento mediante una serie de pasos de inferencia

suele denominar deducción automática porque se suele utilizar onamiento como proceso deductivo

ndo el trabajo se centra en la obtención de algoritmos que mitan encontrar pruebas de teoremas matemáticos, recibe el nbre de demostración automática de teoremas (DAT)

ucción a la Demostración Automática (II)

)emostradores Automáticos de Teoremas (DAT)

en uso de una representación especial de las fórmulas, una resentación estandarizada: la **forma clausal o clausular**

izan resolución (**principio de Robinson**) mediante un algoritmo se aplica a un conjunto de clausulas de entrada y que nprueba si son insatisfacibles

lizan pruebas por contradicción (o refutación), en la mayoría de casos

las en
lausular

DAT
Estrategia de
Resolución

Prueba por
contradicción

Resultado
Demostración

ucción a la Demostración Automática (III)

emostración Automática de Teoremas tiene como ivo:

- desarrollo de algoritmos que verifiquen un razonamiento diante pasos de inferencia

s involucrados:

- resentación del conocimiento
  - Forma Clausular (FC)
- las para derivar conocimiento
  - Métodos de Resolución (Robinson)
- ategias para controlar dichas reglas
  - Input, ordenada, SLD

darización de Fórmulas (I)

tivo: **Simplificar las fórmulas**

eremos obtener, mediante una serie de **transformaciones**, una nula que sea más fácil de manipular automáticamente, pero que ntenga las propiedades de la fórmula original (*estandarización*)

bjetivo de la **estandarización** de fórmulas es reducir la variedad áctica de un LP, uniformando sus fórmulas

Reducir la variedad sintáctica = reducir el número de conectivas

transformaciones que vamos a aplicar **preservan la semántica** a fórmula original

la fórmula resultante es **equivalente** a la fórmula original

darización de Fórmulas (II)

sformaciones:

rmula en un lenguaje proposicional	$\neg(p \rightarrow q) \vee \neg r$
⬇	⬇
rmula en forma normal conjuntiva	$(p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$
⬇	⬇
rmula en forma clausular	$\{\, p \vee \neg r, \neg q \vee \neg r \,\}$

as Normales (I)

as definiciones:

- **átomo** es una variable proposicional
  - p, q, r y s son átomos
- **literal** es un átomo o su negación (es una proposición o la ación de una proposición)
  - p, ¬p, y r son literales
  - p → q no es un literal
- **cláusula** es una disyunción de uno o más literales
  - $p \vee \neg r \vee \neg q$ es una cláusula; p también lo es
  - $r \wedge s$ no es una cláusula
- **orma clausular** de un razonamiento viene a ser un conjunto de sulas
  - $\{p \vee \neg r \vee \neg q,\ r \vee s,\ \neg q\}$ es una forma clausular

as Normales (II)

jetivo de la estandarización de fórmulas es reducir ariedad sintáctica de un LP, uniformando sus ulas

- ucción de la multiplicidad de conectivas (formas normales en la ca proposicional)
  - Forma normal conjuntiva (FNC)
  - Forma normal disyuntiva (FND)
- ma Clausal o Clausular (variante sintáctica de la Forma Normal juntiva)

ea es que la **fórmula inicial es satisfacible sii su formada es satisfacible**

a Normal Conjuntiva (FNC) (I)

fórmula en **Forma Normal Conjuntiva** (FNC) es una
nción de disyunciones de literales

- $p \vee q) \wedge (r \vee p \vee q)$ es una FNC
- $\wedge (r \vee p \vee q)$ es una FNC
- $\vee p \vee q$ es una FNC
- $\wedge r$ es una FNC
- es una FNC
- $\vee (\neg p \wedge \neg q)$ no es una FNC
- $\to (\neg p \vee \neg q)$ no es una FNC
- $\leftrightarrow q$ no es una FNC
- $\vee \neg\neg q$ no es una FNC
- $p \vee q)$ no es una FNC

a Normal Conjuntiva (FNC) (II)

transformar una fórmula proposicional en otra en se utilizarán los siguientes teoremas de valencia:

erdefinición: (eliminar bicondicionales y condicionales usando la ivalencia)

$\vdash (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

$\vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

es de De Morgan: (interiorizar negaciones usando equivalencias)

$\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

$\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

ribución de $\vee$ y $\wedge$:

$\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$\vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

le negación:

$\vdash \neg\neg A \leftrightarrow A$

a Normal Conjuntiva (FNC) (III)

:

a toda fórmula A, $\vdash A \leftrightarrow FNC(A)$

:

orma normal conjuntiva de una fórmula siempre existe

Es decir, podemos utilizar exclusivamente la FNC de las fórmulas

plos (I)

lar la FNC de (p → q) → r

$(p \to q) \to r$	$(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
$\neg (p \to q) \vee r$	$(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
$\neg (\neg p \vee q) \vee r$	$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
$\neg \neg p \wedge \neg q) \vee r$	$\neg \neg A \leftrightarrow A$
$(p \wedge \neg q) \vee r$	$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$\vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

$) = (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

plos (II)

ular la FNC de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$

$q \rightarrow r))$ — $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

$(q \rightarrow r)$ — $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

$(\neg q \vee r)$ — $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg\neg q \wedge \neg r)$ — $\neg\neg A \leftrightarrow A$

$q \wedge \neg r)$ — $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$

$) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$

plos (III)

lar la FNC de $(p \to r) \lor (q \to p)$

$) \lor (q \to p)$ — $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \lor B)$

$) \lor (q \to p)$ — $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \lor B)$

$) \lor (\neg q \lor p)$

$\lor \neg q \lor p$

$) = \neg p \lor r \lor \neg q \lor p$

cios

lar la FNC de $\neg r \rightarrow \neg (p \vee q)$

fórmula a transformar		regla a aplicar
$\neg r \rightarrow \neg(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	[implicación]
$\neg\neg r \vee \neg(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	[negación]
$r \vee \neg(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	[De Morgan]
$r \vee (\neg p \wedge \neg q)$	$\leftrightarrow$	[distributividad]
$(r \vee \neg p) \wedge (r \vee \neg q)$		

lar la FNC de $\neg p \leftrightarrow ((\neg q \vee \neg r) \rightarrow s)$

a Clausular (FC) (I)

fórmula F es satisfacible sii FN(F) es satisfacible y la existe siempre para cualquier fórmula F, luego mos trabajar exclusivamente con fórmulas en forma al

trabajar más cómodamente con fórmulas en FNC aremos la **Forma Clausular** (FC)

sula: es la disyunción finita de cero o más literales

ene un sólo literal se denomina cláusula atómica o unitaria

o tiene ningún literal se denomina cláusula vacía (☐) y por venio es insatisfacible

a Clausular (FC) (II)

orma Clausular de una fórmula A (FC(A)) es el unto de cláusulas de la Forma Normal Conjuntiva de JC(A))

orma Clausular se entiende como la conjunción de áusulas

$p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge \neg s \wedge (r \vee s)$

$A): \{ p \vee \neg r, \neg q \vee \neg r, \neg s, r \vee s \}$

fórmula A es satisfacible sii FC(A) es satisfacible

a Clausular (FC) (III): Ejemplos

$\rightarrow q) \rightarrow r$

C (A) = $(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

A) = $\{p \vee r, \neg q \vee r\}$

$p \wedge (q \rightarrow r))$

C (A) = $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$

A) = $\{\neg p \vee q, \neg p \vee \neg r\}$

$\rightarrow r) \vee (q \rightarrow p)$

C (A) = $\neg p \vee r \vee \neg q \vee p$

A) = $\{\neg p \vee r \vee \neg q \vee p\}$

a Clausular de una Deducción (I)

deducción T[A1, A2, …, An] ⊢ B es **correcta** sii se
ble T ⊢ A1 ∧ A2 ∧ … ∧ An → B

rema de la deducción

deducción T[A1, A2, …, An] ⊢ B es **correcta** sii se
ble ⊨ A1 ∧ A2 ∧ … ∧ An → B

ivalencia de ⊢ y ⊨

deducción T[A1, A2, …, An] ⊢ B es **correcta** sii A1 ∧
… ∧ An ∧ ¬B es insatisfacible

a Clausular de una Deducción (II)

deducción T[A1, A2, ..., An] ⊢ B es **correcta** sii FC(A1 ∧ ... ∧ An ∧ ¬B) es insatisfacible

tanto, *automatizar el análisis de la* *corrección* *de una deducción* *a por automatizar el análisis de la* *insatisfacibilidad* *de una* *nula*

a Clausular de una Deducción (III)

deducción T[A1, A2, ..., An] ⊢ B es **correcta** sii FC(A1 ∧ ... ∧ An ∧ ¬B) es insatisfacible

tivo:

lo un razonamiento ([A1, A2, …, An] ⊢ B) con premisas {A1, …, y conclusión B, queremos transformarlo en un conjunto de usulas: su **forma clausular**

a ello, transformamos todas las Ai y la negación de la conclusión B) en cláusulas, generando un conjunto de cláusulas

a Clausular de una Deducción (IV)

- s: dada una deducción: [A1, A2, ..., An] $\vdash$ B
  - ener la forma clausular de cada Ai, $1 \leq i \leq n$
  - ener la forma clausular de $\neg$B
  - lizar la unión de todos los conjuntos de cláusulas
  - nprobar la satisfacibilidad
- nto, se trata ahora de ver cómo comprobar automáticamente sfacibilidad de un conjunto de cláusulas

Calcular la **forma normal conjuntiva (FNC)** y transformar dicha forma conjuntiva en un conjunto de cláusulas

Clausular de una Deducción (III): Ejemplo

$\rightarrow q, \neg q] \vdash \neg p \wedge q$

$$
\begin{array}{lcl}
FC(p \rightarrow q) & = & \{\neg p \vee q\} \\
FC(\neg q) & = & \{\neg q\} \\
FC(\neg(\neg p \wedge q)) & = & \{p \vee \neg q\}
\end{array}
$$

- la forma clausular de la estructura deductiva es

$$\{ \neg p \vee q, \ \neg q, \ p \vee \neg q \}$$

nos de comprobar si este conjunto de cláusulas es satisfacible, lecir, si hay una interpretación que es un modelo

es modelo de una cláusula C si satisface a C (vista como si fuera una rmula cualquiera)

es modelo de una forma clausular FC si satisface a todas sus cláusulas

este caso, hay una interpretación que es modelo de la forma clausular:

- $I(p) = \mathbf{f}$
- $I(q) = \mathbf{f}$

r lo tanto, la deducción es incorrecta

cios

- a forma clausular la siguiente argumentación
  - $(q \rightarrow r) \vdash p \vee q \rightarrow r$
- a forma clausular, indicando cada paso y regla ada, la siguiente argumentación:
  - $\rightarrow \neg p,\ \neg (p \wedge r) \rightarrow q,\ p \rightarrow \neg (q \rightarrow r)\} \vDash r \vee s$

standarización de Fórmulas Proposicionales

Curso 2014-2015

Mari Carmen Suárez de Figueroa Baonza
mcsuarez@fi.upm.es

POLITÉCNICA